



TITLE:

# Affine Lie Algebraの表現の分岐則と Modular形式(保型形式とその周辺)

AUTHOR(S):

三輪, 哲二; 神保, 道夫

---

CITATION:

三輪, 哲二 ...[et al]. Affine Lie Algebraの表現の分岐則とModular形式(保型形式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 513: 77-96

ISSUE DATE:

1984-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98354>

RIGHT:

# Affine Lie Algebraの表現の分岐則と Modular 形式

京大数理研

三輪 哲二  
MIWA Tetsuji  
神保 道夫  
JIMBO Michio

§0. Affine Lie Algebraが  $\theta$  函数や modular形式と密接に結びついていることは、既に以前から認識されていたが、Kac-Peterson は最近の論文<sup>2)</sup>で

指標公式 =  $\theta$  級数の反対称和の比

という直接の関係を確立した。その応用として、彼等は、affine Lie algebraの既約表現に現われる“string function”が  $\Gamma(1) = SL(2, \mathbb{Z})$  の適当な主合同部分群に関する modular形式となることを示し、簡単な場合にそれらも実際に決定している。

本稿においては、表現の部分リー環に関する既約分解において生じる string functionの類似物について、同様の結果を報告したい。

Kac-Peterson理論の概要と、affine Lie algebra の用語等については、本講究録の小池・田中・森田氏による記事と

参照して下さい。

§1.  $\tilde{\mathfrak{g}}$  を affine Lie algebra,  $\sigma$  をその diagram automorphism とし, fixed point subalgebra を

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = \{ X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \sigma(X) = X \}$$

とおく。

$\tilde{\Lambda}$  を  $\tilde{\mathfrak{g}}$  の dominant integral weight とし,  $L(\tilde{\Lambda})$  で,  $\tilde{\Lambda}$  を最高 weight に持つ既約な  $\tilde{\mathfrak{g}}$ -加群を表わす<sup>\*</sup>。このとき, 部分リー環  $\mathfrak{g}$  の表現として  $L(\tilde{\Lambda})$  は完全可約であり, 有限の重複度  $(\tilde{\Lambda}: \Lambda)$  を以て,  $\mathfrak{g}$  の standard modules  $L(\lambda)$  達の直和に分解する。(  $\mathfrak{g}$  の null root を  $\delta$  とすれば,  $L(\Lambda - n\delta) \cong L(\lambda)$  であることに注意 )

$$L(\tilde{\Lambda}) \cong \bigoplus_{\lambda \bmod \mathbb{C}\delta} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{L(\Lambda - n\delta)}_{(\tilde{\Lambda}: \Lambda - n\delta)} \quad (1)$$

ここで, 容易にわかるように, 既約成分としては

$$\text{level}(\lambda) = p' \cdot \text{level}(\tilde{\Lambda}) \quad (2)$$

を満たすもののみが現われる。(  $p' \in \mathbb{Z}_+$  は  $\tilde{\mathfrak{g}}$  と  $\sigma$  のみから定まる自然数 ) そこで,

$$P_+^0(m) = \{ \Lambda \mid \Lambda \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の dominant integral weight of level } m \} \bmod \mathbb{C}\delta$$

とおく。  $P_+^0(m)$  は有限集合であり, 次の指標の等式が導かれる:  
(1), (2) より

\*) 以下 standard module とおす。

$$\text{ch } L(\tilde{\Lambda})|_f = \sum_{\Lambda \in P_+^0(m, p')} E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q) \text{ch } L(\Lambda)$$

ただし  $q = e^{-\delta}$ ,  $m = \text{level}(\tilde{\Lambda})$ ,  $f$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan subalgebra であり,

$$E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq -\infty}} (\tilde{\Lambda} : \Lambda - n\delta) q^n$$

とおいた。

Kac-Peterson<sup>2)</sup> は,  $\text{ch } L(\Lambda)$  に適当な  $q$  の有理数中  $q^{s_1}$  ( $s_1 \in \mathbb{Q}$ ) を乗じたものが, theta 級数の反対称和の比として表わされることを指摘した。以下これを  $\chi_\Lambda$  と書き, normalized character と呼ぶ。彼等は  $\{\chi_\Lambda\}_{\Lambda \in P_+^0(m)}$  の持つ保型性をも求めている。これに応じて, 我々の  $E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q)$  を少し修正し

$$e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau) = q^{s(\tilde{\Lambda}, \Lambda)} E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q) \\ (q = e^{2\pi i \tau}, \exists s(\tilde{\Lambda}, \Lambda) \in \mathbb{Q})$$

としたものを, 仮に branching function と呼ぶことにすれば, それらに対し次の保型性が導かれる:

命題. 行列  $\mathcal{E}(\tau) = (e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau))_{\tilde{\Lambda} \in \tilde{P}_+^0(m), \Lambda \in P_+^0(p'm)}$  は,

群  $\Gamma = \Gamma(1) \cup \Gamma(2)$  に関する行列値 modular form of weight 0 であり,

$$\mathcal{E}(g\tau) = \tilde{S}_g \mathcal{E}(\tau) S_g, \quad g \in \Gamma$$

$\tilde{S}_g, S_g$  : 定数行列

という形の変換性とも,

$\tilde{S}_g, S_g$  の具体形は, Kac-Peterson の論文より知られる.

§2. 実際に branching function が決定されるのは,  $\tilde{\Lambda}$  の level  $m$  が小さい場合に限られている. 我々は, 更に条件として

$$(i) \tilde{\sigma}_g = X_{\alpha}^{(k)} : \text{classical affine}$$

(ie.  $X = A, B, C, D$ ;  $k = 1, 2$ )

$$(ii) \sigma^2 = \text{id.}$$

を課して, 起り得る 別表 (別表 1) の 13 通りを考察する. このとき, 結果は次のようなタイプに分れる.

Case 1. (diagonal 型)

$$e_{\tilde{\gamma}_1}(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & (\tilde{\Lambda}|_g = \Lambda \text{ or } \sigma(\tilde{\Lambda})|_g = \Lambda) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここに  $f(\tau) = 1, \eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)$  等.

Case 2.

$$e_{\tilde{\gamma}_1}(\tau) = \det(\text{一変数 theta 函数の zero value})$$

ただし, 一変数 theta 函数というのは,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{g}_{\lambda, N}(\tau, u) \\ \hat{\mathfrak{g}}_{\lambda, N}(\tau, u) \end{aligned} \right\} = \sum_{\substack{\nu = n + \lambda/N, \, n \in \mathbb{Z}}} \left\{ \begin{aligned} (-)^{nN} \\ (-)^{n(N+1)} \end{aligned} \right\} e^{\pi i \tau N \nu^2 + 2\pi i N \nu u} \quad (3)$$

( $\text{Im } \tau > 0, \, u \in \mathbb{C}$ )

の形のものと言う。この結果のみはすべての  $m$  について成立つ。

Case 3. (Hecke 型)

Hecke's indefinite modular form を用いて  $e_{\lambda, N}(\tau)$  が表わされる。格子  $L = \mathbb{Z}^2$  上の二次形式としては、次の三系列が出てくる：

$$B_\ell(x, y) = 2(\ell+2)x^2 - 2\ell y^2$$

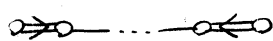
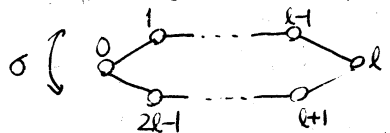
$$B'_\ell(x, y) = 2(\ell+2)x^2 - 8(\ell+1)y^2$$

$$B''_\ell(x, y) = 8(\ell+1)x^2 - 2\ell y^2$$

次節で、Case 3 の実例を詳しく述べたい。

§3. affine Lie algebras の pair として、

$$\tilde{\mathfrak{g}} = A_{2\ell-1}^{(1)}, \quad \mathfrak{g} = C_\ell^{(1)}$$



$\sigma$  として、 $\sigma(j) = 2\ell - j \pmod{2\ell}$  なる頂点の permutation から定まる automorphism をとる。このとき  $p' = 1$  であり、 $\text{level}(\tilde{\lambda}) = \text{level}(\lambda) = m$ 。以下  $m = 1$  とする。従っ

2.  $\tilde{\Lambda}, \Lambda$  はそれぞれある基本 weight  $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_j$ ,  $\lambda = \Lambda_k$  と一致する.

座標をと, 具体的に normalized character を書き下すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} A_{2\ell-1}^{(1)} \quad \tilde{\chi}_{\tilde{\Lambda}_j}(\tau, \tilde{u}) &= \tilde{N}_j(\tau, \tilde{u}) / \tilde{D}(\tau, \tilde{u}) \\ \tilde{u} &= (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2\ell}) \in \mathbb{C}^{2\ell} \\ \tilde{N}_j(\tau, \tilde{u}) &= \sum_{\sigma \in S_{2\ell}} \text{sgn } \sigma \sum_{\substack{\nu_i \in \mathbb{Z} + \frac{\tilde{\lambda}(\sigma_i)}{2\ell+1} \\ \nu_1 + \dots + \nu_{2\ell} = 0}} e^{\pi i (2\ell+1) \tau \sum_{i=1}^{2\ell} \nu_i^2 + 2\pi i (2\ell+1) \sum_{i=1}^{2\ell} \nu_i \tilde{u}_i} \\ \tilde{D}(\tau, \tilde{u}) &= \eta(\tau)^{-\ell(\ell+1)} \prod_{1 \leq i < j \leq 2\ell} \theta(\tau, \tilde{u}_i - \tilde{u}_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \tilde{\lambda} &= (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{2\ell}) = (2\ell - \lambda, \dots, 2\ell - j - \lambda, \dots, 1 - \lambda, 0 - \lambda), \\ \lambda &= \frac{2\ell-1}{2} + \frac{j}{2\ell}, \quad \theta(\tau, u) \text{ は} \end{aligned}$$

$$\theta(\tau, u) = q^{\frac{1}{8}} z^{\frac{1}{2}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1})(1 - zq^{n+1})(1 - z^{-1}q^n), \quad z = e^{2\pi i u}$$

で定義される.

$$\begin{aligned} C_k^{(1)} \quad \chi_{\Lambda_k}(\tau, u) &= N_k(\tau, u) / D(\tau, u) \\ u &= (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^k \\ N_k(\tau, u) &= \det(\mathcal{G}_{\lambda_i, 2\ell+2}(\tau, u_j) - \mathcal{G}_{\lambda_i, 2\ell+2}(\tau, -u_j))_{1 \leq i, j \leq k} \\ D(\tau, u) &= \eta(\tau)^{-k(k+1)} \prod_{i=1}^k \theta(\tau, 2u_i) \\ &\quad \times \prod_{1 \leq i < j \leq k} \theta(\tau, u_i - u_j) \theta(\tau, u_i + u_j) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (\ell+1, \dots, \ell-k, \dots, 2, 1).$$

上記の表示から分かるように, これらはそれぞれ  $H_+ \times \mathbb{C}^{2\ell}$ ,  $H_+ \times \mathbb{C}^k$  ( $H_+ = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$ ) で正則とな, 2113.

後者は、擬周期性

$$\chi(\tau, u_1, \dots, u_{i+1}, \dots, u_\ell) = \chi(\tau, u) \quad (4)$$

$$\chi(\tau, u_1, \dots, u_i + \tau, \dots, u_\ell) = e^{-2\pi i \tau - 4\pi i u_i} \chi(\tau, u)$$

及び  $C_\ell$  の Weyl 群  $G_\ell \times \mathbb{Z}_2^\ell$  に関する対称性

$$\chi(\tau, u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(\ell)}) = \chi(\tau, u) \quad \forall \sigma \in G_\ell \quad (5)$$

$$\chi(\tau, u_1, \dots, -u_i, \dots, u_\ell) = \chi(\tau, u)$$

を満たし、

$$\mathcal{C} = \{ \chi(\tau, u) \in \mathcal{O}(H_+ \times \mathbb{C}^\ell) \mid \chi \text{ は (4), (5) を満たす} \}$$

が  $\mathcal{O}(H_+)$ -linear basis となる。ここで、

さて、この座標では  $C_\ell^{(1)}$  の Cartan  $\lambda$  の制限は  $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_\ell, -u_1, \dots, -u_\ell)$  とおくことに出来る。このとき

$$\bar{\chi}_{\tilde{\lambda}_j}(\tau, u_1, \dots, u_\ell) := \tilde{\chi}_{\tilde{\lambda}_j}(\tau, u_1, \dots, u_\ell, -u_1, \dots, -u_\ell)$$

は  $\mathcal{C}$  に属することが検証され、従って

$$\bar{\chi}_{\tilde{\lambda}_j}(\tau, u) = \sum_{k=0}^{\ell} e_{jk}^k(\tau) \chi_{\lambda_k}(\tau, u) \quad (6)$$

となる  $e_{jk}^k(\tau) \in \mathcal{O}(H_+)$  が存在する。これが  $31$  意味の branching function に他ならない。

一般に、 $e_{\tilde{\lambda}_1}(\tau) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}|_f \equiv \Lambda \pmod{\mathcal{Q} \text{ の root lattice}}$  が容易に分るが、今の状況にあてはめると

$$e_{jk}^k(\tau) = 0 \quad (j \neq k \pmod{2})$$

が導かれることも注意しておく。



定理<sup>3)</sup>  $\eta(\tau)^2 e_{jk}^x(\tau) = \theta_{k+1,j}^{x+2,x}(\tau) \quad (0 \leq j, k \leq x)$

ここに、右辺は Hecke's indefinite modular form

$$\theta_{m,n}^{b,c}(\tau) := \sum_{\substack{-b|x| < a|y| \leq b|x| \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 + (\frac{m}{2c}, \frac{n}{2c})}} \text{sgn } x \cdot \gamma_{bx^2 - cy^2}$$

$$(a, b, c \in \mathbb{Z}_+, \quad a^2 - bc = 1)$$

と表わす。

注意. Kac-Peterson は、最も簡単な  $A_1^{(1)}$  の場合に限って、この string function を決定している。彼等の結果は

$$\eta(\tau)^3 \zeta_{(m-k)1_0+k1_1, (m-j)1_0+j1_1}^{(1),2)}(\tau) = \theta_{k+1,j}^{m+2,m}(\tau)$$

即ち上で  $x \leftrightarrow m$  としたものと同一の expression となっている。(次節参照)

しか、現在の場合  $\zeta_{\pm}^x(\tau) = (e_{jk}^x(\tau))_{\substack{j \neq k \pmod{2} \\ (j \neq k \pmod{2})}}$  は正方行列にならなくなり、行列式は意味をもたない。実際、変換性より

$$\det \zeta_{\pm}^x(\tau) = \begin{cases} 1 & x \text{ even} \\ (\eta(\tau)/\eta(2\tau))^{\pm 1} & x \text{ odd} \end{cases}$$

を示すことができる。(cf. Kac-Peterson, string functions の行列式に関する結果.) この最も簡単な場合から、次のような identity が導かれる (Ramanujan による):

$$\eta(\tau)\eta(\tau^9) + \tau^2 H(\tau)H(\tau^9) = \eta(\tau^5)/\eta(\tau)\eta(\tau^9)$$

に代し

$$G(q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+1})^{-1} (1 - q^{5n+4})^{-1}, \quad H(q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{5n+2})^{-1} (1 - q^{5n+3})^{-1}$$

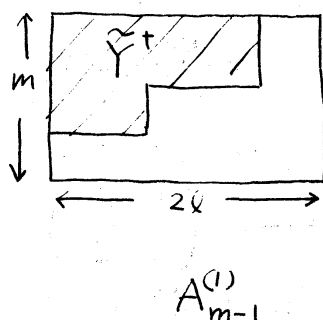
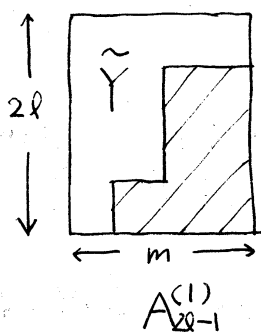
$$\varphi(q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1}).$$

34. この節で、branching functions の決定方法の概略を、§3の例に則して述べよう。

$e_{jk}^{\ell}(\tau) = e_{\tilde{j}, k}^{\ell}(\tau)$  は、theta 函数の等式 (6) により特徴づけられる量であるが、Lie 環の rank  $\ell$  が大きいと、この式を直接扱うのは困難である。そこで、以下に述べるような "duality" を利用して、rank  $\ell$  と level  $m$  の役割を入れ替え、一変数 theta 函数の等式に問題を帰着させる。

以後  $\ell, m$  は任意の正整数とする。

$\tilde{\sigma}_j = A_{2\ell-1}^{(1)}$  の dominant integral weight  $\tilde{\gamma}$  は、この level  $m$  と、"classical part" (有限次元 Lie 環  $A_{2\ell-1}$  の dominant integral weight) で定まる。良く知られているように、後者はヤング図形でパラメトライズされる。そこで、 $m$  を固定し、 $\tilde{\Lambda}$  を、深さ  $\leq 2\ell$ 、幅  $\leq m$  の図形  $\tilde{\gamma}$  (下図左) :

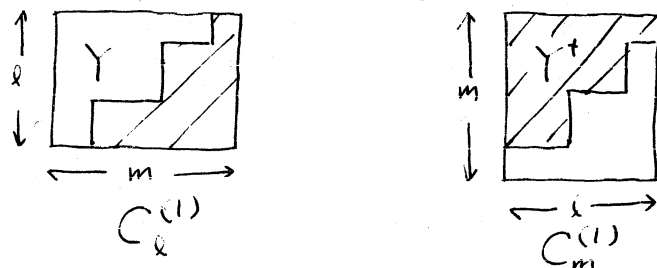


によって表わすことにする。いま上図を転置してみると,  $\tilde{Y}$  の complement (斜線部) に来る図形  $\tilde{Y}^+$  から, affine Lie algebra  $A_{m-1}^{(1)}$  の level  $= 2l$  の weight  $\tilde{\Lambda}^+$  が得られる。即ち,

$$\left\{ A_{2l-1}^{(1)} \text{ の level } m \text{ の } ^*) \right\} \longleftrightarrow \left\{ A_{m-1}^{(1)} \text{ の level } 2l \text{ の dominant integral weight} \right\}$$

という 1:1 対応がある。

全く同様に,  $C_l^{(1)}$  の level  $m$  の weight  $\Lambda$  は, 深さ  $\leq l$ , 幅  $\geq m$  のヤング図形  $Y$  に対応し, 上と同じ操作により, これは  $C_m^{(1)}$  の level  $l$  の weight  $\Lambda^+$  と 1:1 に対応する。



そこで, Lie 環の pair

$$\mathfrak{g}^+ = A_{m-1}^{(1)} \subset \mathfrak{g}^+ = C_m^{(1)}$$

に関する表現の既約分解の問題を考えよう。ここで, 上記の埋込みは, 有限次元 Lie 環の自然な埋込み

$$\mathfrak{gl}(m) \subset \mathfrak{gl}(2m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \mid A, B, C \in \mathfrak{gl}(m), {}^tB = B, {}^tC = C \right\}$$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$$

に Laurent polynomials  $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$  を tensor して得られる。

\* 正確には  $A_{2l-1}^{(1)}$  と  $\mathfrak{sl}(2l, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  であり,  $A_{m-1}^{(1)}$  についても同様。

このとき,  $\mathfrak{gl}^+$  の level  $l$  の既約表現  $L(\Lambda^+)$  は,  $\tilde{\mathfrak{gl}}^+$  の level  $2l$  のそれに分解し, normalized characters の等式として次の形のものを生じる.

$$\sum_{\tilde{\Lambda}^+} \hat{\chi}_{\tilde{\Lambda}^+}^{(m)}(\tau, u^+) e_{\tilde{\Lambda}^+/\Lambda^+}^+(\tau) = \chi_{\Lambda^+}^{(m)}(\tau, u^+)$$

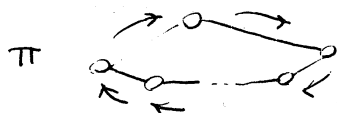
右辺は  $C_m^{(1)}$  の normalized character, また

$$\hat{\chi}_{\tilde{\Lambda}^+}^{(m)}(\tau, u^+) = \sum_{\nu=0}^{m-1} g_{2\ell\nu - \ell m + |\tilde{\gamma}^+|, 2\ell m}(\tau, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m u_j^+) \times \eta(\tau)^+ \tilde{\chi}_{\pi^\nu(\tilde{\Lambda}^+)}^{(m-1)}(\tau, u^+)$$

$\tilde{\chi}_{\tilde{\Lambda}^+}^{(m-1)}(\tau, u^+)$ :  $A_{m-1}^{(1)}$  の normalized character

$|\tilde{\gamma}^+| = \tilde{\gamma}^+$  のタイルの数

$\pi$ :  $A_{m-1}^{(1)}$  の Dynkin 図形の頂点の巡回置換



である。

定理 (duality)<sup>4)</sup> weight の間の上記対応の下に

$$e_{\tilde{\gamma}_\Lambda}(\tau) = e_{\tilde{\Lambda}^+/\Lambda^+}^+(\tau).$$

注意  $q = e^{2\pi i \tau} \rightarrow 0$  の極限では, 有限次元 Lie 環対

$$\mathfrak{gl}(2\ell) \supset \mathfrak{sp}(2\ell) \leftrightarrow \mathfrak{gl}(m) \subset \mathfrak{sp}(2m)$$

の分岐則間の duality

$$(\tilde{\gamma} : \gamma) = (\gamma^+ : \tilde{\gamma}^+)$$

を得る (直接の証明も可能である<sup>4)</sup>).

ここで、もとの問題に戻り  $m=1$  とおけば、第2の式(6)は

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}} g_{j, 2\ell}(\tau, u^+) \eta(\tau)^{-1} e_{jk}^{\ell}(\tau) \\ &= \frac{1}{\theta(\tau, 2u^+)} (g_{k+1, 2\ell(t_2)}(\tau, u^+) - g_{k+1, 2\ell(t_2)}(\tau, -u^+)) \\ & \quad (u^+ \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

となり、係数  $e_{jk}^{\ell}(\tau)$  の表示は留数計算で容易に求められる。

ここから式の変形によつて Hecke の表示 (定理 3.3) にたどり着く。

この節の議論は、他の Lie 環にも適用可能であるが、一般の場合第2の等式(6)にあたるものは、簡単な Lie 環的解釈ができないことを注意しておく。

§5. Kac-Peterson もその序文で断わり、この通り、<sup>我々の</sup>問題設定は Lie 環論的であり、Lie 環論で議論が明快になつてはいるものの、本質的に Lie 環論を用いている部分はほとんどないように見える。特に、何故 Hecke の indefinite modular form が出てくるか、またそれが何故 positive definite metric でも書けるのかについては、今の所何の説明もなされていないようである。 <sup>Lie 環論からは</sup>

最後に、level, rank が全く一般の場合には string

function, branching function は、符号数  $(n, n)$  の二次形式に付随した theta の如きものになるが、この場合にも Hecke の拡張があるかどうかを問題として、この報告を終えたい。

### 文献

- 1) V.G. Kac and D.H. Peterson, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980) 1057.
- 2) \_\_\_\_\_, Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, preprint, to appear in Advances in Math.
- 3) M. Jimbo and T. Miwa, Irreducible decomposition of fundamental modules for  $A_n^{(1)}$  and  $C_n^{(1)}$ , and Hecke modular forms, RIMS preprint 434 (1983), to appear in Advanced studies in Pure Math.
- 4) \_\_\_\_\_, On a duality of branching rules for affine Lie algebras, RIMS preprint 453 (1983).

Table III.

	$\mathcal{Q}(\bar{A})$	$\mathcal{Q}(A)$	$p$	$p'$	$\overline{v(\Lambda_0)}$	$ \overline{v(\Lambda_0)} ^2$	$\overline{v(u)}$
(1)	$A_{2\ell+1}^{(1)}$	$A_\ell^{(1)}$	2	1	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell+1} \tilde{e}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=\ell+2}^{2\ell+2} \tilde{e}_i$	$\frac{1}{2}(\ell+1)$	$\sum_{i=1}^{\ell+1} u_i \tilde{e}_i + \sum_{i=1}^{\ell+1} u_i \tilde{e}_{\ell+i+1}$
(2)	$A_{2\ell-1}^{(1)}$	$C_\ell^{(1)}$	1	1	0	0	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{2\ell+1-i}$
(3)	$A_{2\ell}^{(1)}$	$A_{2\ell}^{(2)}$	1	2	$\frac{1}{2(2\ell+1)} \sum_{i=1}^{2\ell+1} \tilde{e}_i - \frac{1}{2} \tilde{e}_{2\ell+1}$	$\frac{\ell}{2(2\ell+1)}$	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{2\ell+1-i}$
(4)	$A_{2\ell+1}^{(1)}$	$D_{\ell+1}^{(2)}$	2	2	$\frac{1}{2\ell+2} \sum_{i=1}^{2\ell+2} \tilde{e}_i - \tilde{e}_{2\ell+2}$	$\frac{2\ell+1}{2\ell+2}$	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{2\ell+2-i}$
(5)	$C_{2\ell}^{(1)}$	$C_\ell^{(1)}$	2	1	$\sum_{i=1}^{2\ell} \tilde{e}_i$	$\ell$	$\sum_{i=1}^{\ell} 2u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} 2u_i \tilde{e}_{2\ell+1-i}$
(6)	$C_{2\ell+1}^{(1)}$	$A_{2\ell}^{(2)(+)}$	2	2	$2 \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{e}_i + \tilde{e}_{\ell+1}$	$2\ell + \frac{1}{2}$	$-\sum_{i=1}^{\ell} 2u_i \tilde{e}_{\ell+1-i} + \sum_{i=1}^{\ell} 2u_i \tilde{e}_{\ell+1+i}$
(7)	$D_{2\ell+1}^{(2)}$	$A_{2\ell}^{(2)}$	1	1	$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2\ell} \tilde{e}_i$	$\frac{1}{4}\ell$	$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2} u_i \tilde{e}_{2\ell+1-i}$
(8)	$D_{2\ell+2}^{(2)}$	$D_{\ell+1}^{(2)}$	2	1	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\ell+1} \tilde{e}_i$	$\ell + \frac{1}{2}$	$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2} u_i \tilde{e}_{2\ell+2-i}$

(9)	$D_{\ell+1}^{(1)}$	$B_\ell^{(1)}$	1	1	0	0	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i$
(10)	$D_{2\ell}^{(1)}$	$A_{2\ell-1}^{(2)}$	2	1	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\ell} \tilde{e}_i$	$\frac{1}{2}\ell$	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{2\ell+1-i}$
(11)	$D_{2\ell+1}^{(1)}$	$B_\ell^{(1)}$	2	1	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2\ell+1} \tilde{e}_i$	$\frac{1}{2}\ell + \frac{1}{4}$	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_i - \sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{2\ell+2-i}$
(12)	$A_{2\ell+1}^{(2)}$	$A_{2\ell}^{(2)}$	1	1	$\frac{1}{2} \tilde{e}_1$	$\frac{1}{4}$	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{i+1}$
(13)	$B_{\ell+1}^{(1)}$	$D_{\ell+1}^{(2)}$	2	1	$\tilde{e}_1$	1	$\sum_{i=1}^{\ell} u_i \tilde{e}_{i+1}$

(†) The 0-th vertex is placed at the right end.

## 付録2 Hecke indefinite modular forms の Dedekind eta function による表示

京大大型計算機センターの利用により, Hecke indefinite modular forms  
の Dedekind eta function による表示を求めてみた。下に計算データを示す。

(記号)  $a, b, c$  : 正整数,  $a^2 - bc = 1$  固定

$$H_{mn}(\tau) := \sum_{\substack{-b|x| < a|y| \leq b|x| \\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 + (\frac{m}{2b}, \frac{n}{2c})}} \text{sgn } x \cdot e^{2\pi i \tau (bx^2 - cy^2)}$$

(対称性)

$$\begin{aligned} H_{mn}(\tau) &= -H_{-m, n}(\tau) = H_{m, -n}(\tau) \\ &= H_{am+bn, cm+an}(\tau) \end{aligned}$$

$$a=2, b=3, c=1$$

$$H_{10}(\tau) = \eta(\tau)^2$$

$$a=3, b=8, c=1$$

$$H_{20}(\tau) = \eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)^4 \eta(4\tau)^{-1}$$

$$H_{41}(\tau) = 2\eta(2\tau)\eta(4\tau)$$

$$H_{10}(\tau) + H_{11}(\tau) + H_{30}(\tau) - H_{51}(\tau) = \eta(\frac{\tau}{4})^{-1} \eta(\frac{\tau}{2})^4 \eta(\tau)^{-1}$$

$$H_{10}(\tau) - H_{11}(\tau) - H_{30}(\tau) - H_{51}(\tau) = \eta(\frac{\tau}{4}) \eta(\frac{\tau}{2})$$

$$a=3, b=4, c=2$$

$$H_{21}(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)$$

$$H_{10}(\tau) - H_{12}(\tau) = \eta(\frac{\tau}{2})\eta(\tau)$$

$$H_{10}(\tau) + H_{12}(\tau) = \eta(\frac{\tau}{2})^{-1} \eta(\tau)^4 \eta(2\tau)^{-1}$$

$$a=4, b=15, c=1$$

$$H_{50}(\tau) = \eta(\tau)^2 \eta(2\tau)^{-1} \eta(10\tau)$$

$$H_{51}(\tau) = 2\eta(4\tau)\eta(10\tau)^3 \eta(20\tau)^{-1}$$

$$H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)^3 \eta(4\tau)^{-1} \eta(5\tau)\eta(10\tau)^{-1} \eta(20\tau)$$

$$H_{5,1}(\tau) - H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\frac{\tau}{2})\eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)\eta(\frac{\tau}{2})^{-1} \eta(5\tau)^3 \eta(10\tau)^{-1}$$

$$H_{5,1}(\tau) + H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\frac{\tau}{2})^{-1} \eta(\tau)^2 \eta(\frac{\tau}{2})$$



$$\begin{aligned}
2H_{11}(\tau) - H_{51}(\tau) + 2H_{71}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{2}{5}\tau\right)^2\eta\left(\frac{4}{5}\tau\right)^{-1}\eta(4\tau) \\
2H_{20}(\tau) - 2H_{40}(\tau) - H_{10,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{5}\right)\eta\left(\frac{2}{5}\tau\right)^{-1}\eta\left(\frac{4}{5}\tau\right)\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1} \\
-2H_{50}(\tau) + H_{51}(\tau) - H_{10,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{4}\right)\eta\left(\frac{5}{4}\tau\right)^{-1}\eta\left(\frac{5}{2}\tau\right)^2 \\
2H_{50}(\tau) + H_{51}(\tau) - H_{10,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{5}{2}\right)^3\eta(\tau)^{-1}\eta\left(\frac{5}{4}\tau\right)\eta\left(\frac{5}{2}\tau\right)^{-1}\eta(5\tau) \\
H_{10}(\tau) - H_{21}(\tau) - H_{50}(\tau) - H_{81}(\tau) - H_{11,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{2}{5}\tau\right)\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{-1}
\end{aligned}$$

$$a=4, b=5, c=3$$

$$a=4, b=3, c=5$$

$$\begin{aligned}
H_{10}(\tau) &= \eta(2\tau)\eta(5\tau)^2\eta(10\tau)^{-1} \\
H_{1,5}(\tau) &= -2\eta(2\tau)^2\eta(4\tau)^{-1}\eta(20\tau) \\
H_{2,0}(\tau) &= 2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(5\tau)^{-1}\eta(10\tau)^3\eta(20\tau)^{-1} \\
-H_{1,5}(\tau) + H_{2,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)^3\eta(2\tau)^{-1}\eta\left(\frac{5}{2}\tau\right)\eta(5\tau)^{-1}\eta(10\tau) \\
H_{1,5}(\tau) + H_{2,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{2}\right)\eta\left(\frac{5\tau}{2}\right)^{-1}\eta(5\tau)^2 \\
H_{1,0}(\tau) + 2H_{1,2}(\tau) + 2H_{1,4}(\tau) &= \eta\left(\frac{5}{5}\right)^2\eta\left(\frac{2\tau}{5}\right)^{-1}\eta(2\tau) \\
H_{1,0}(\tau) + H_{1,5}(\tau) - H_{2,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{4}\right)\eta\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)\eta\left(\frac{5}{4}\tau\right)^{-1}\eta\left(\frac{5}{2}\tau\right)^3\eta(5\tau)^{-1} \\
2H_{1,0}(\tau) - H_{1,5}(\tau) + H_{2,0}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{5}{2}\right)^2\eta\left(\frac{5}{4}\tau\right) \\
2H_{1,1}(\tau) + 2H_{1,3}(\tau) + H_{1,5}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{4}{5}\tau\right)\eta(2\tau)^2\eta(4\tau)^{-1} \\
H_{2,0}(\tau) + 2H_{2,2}(\tau) + 2H_{2,4}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{5}{5}\right)^{-1}\eta\left(\frac{2\tau}{5}\right)^3\eta\left(\frac{4\tau}{5}\right)^{-1}\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)
\end{aligned}$$

$$a=5, b=24, c=1$$

$$\begin{aligned}
H_{4,0}(\tau) &= \eta(3\tau)^{-2}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^5\eta(12\tau)^{-2} \\
H_{6,0}(\tau) &= \eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau) \\
H_{8,1}(\tau) &= 2\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)^3 \\
H_{12,0}(\tau) &= 2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau) \\
H_{2,0}(\tau) - H_{14,0}(\tau) &= \eta(\tau)\eta(3\tau)^{-2}\eta(6\tau)^5\eta(12\tau)^{-2} \\
H_{2,0}(\tau) + H_{14,0}(\tau) &= \eta(\tau)^3\eta(2\tau)^8\eta(4\tau)^{-3} \\
-H_{2,1}(\tau) + H_{10,1}(\tau) &= 2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^2 \\
H_{2,1}(\tau) + H_{10,1}(\tau) &= 2\eta(\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^2 \\
-2H_{4,0}(\tau) + H_{12,0}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{5}{3}\right)\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)\eta(2\tau)^2 \\
H_{4,0}(\tau) + H_{12,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^5\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-2}\eta(4\tau) \\
H_{6,1}(\tau) - H_{18,1}(\tau) &= 2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2\eta(12\tau)^{-1} \\
H_{6,1}(\tau) + H_{18,1}(\tau) &= 2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^2\eta(6\tau)^2\eta(12\tau)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{2,0}(\tau) + 2H_{6,0}(\tau) - H_{14,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-2} \eta\left(\frac{2}{3}\tau\right)^5 \eta(\tau) \eta\left(\frac{4}{3}\tau\right)^{-2} \\
H_{2,0}(\tau) - H_{6,0}(\tau) - H_{14,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right) \eta\left(\frac{2}{3}\tau\right)^{-1} \eta\left(\frac{4}{3}\tau\right) \eta(2\tau)^2 \eta(4\tau)^{-1} \\
2H_{6,0}(\tau) + H_{6,1}(\tau) - H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \eta\left(\frac{3}{4}\tau\right) \eta\left(\frac{3}{2}\tau\right)^{-1} \eta(3\tau) \\
-2H_{6,0}(\tau) + H_{6,1}(\tau) - H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \eta\left(\frac{3}{4}\tau\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{3}{2}\tau\right)^2 \\
H_{2,0}(\tau) + H_{2,1}(\tau) + H_{10,1}(\tau) - H_{14,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^5 \eta(3\tau)^{-2} \\
H_{2,0}(\tau) - H_{2,1}(\tau) - H_{10,1}(\tau) - H_{14,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \\
2H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) - 2H_{10,1}(\tau) + H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1} \eta(2\tau)^2 \\
H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) + H_{10,1}(\tau) - H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2 \\
-H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) + H_{10,1}(\tau) + H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2 \eta(2\tau)^3 \eta(4\tau)^{-1} \\
-2H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) - 2H_{10,1}(\tau) - H_{18,1}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1} \eta(2\tau)^{-1} \eta(4\tau) \\
H_{3,0}(\tau) + H_{3,1}(\tau) - H_{9,1}(\tau) + H_{15,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right) \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \eta(3\tau) \\
H_{3,0}(\tau) - H_{3,1}(\tau) - H_{9,1}(\tau) - H_{15,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-1} \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2 \\
-H_{11,0}(\tau) + H_{11,1}(\tau) + H_{5,0}(\tau) - H_{7,0}(\tau) + H_{7,1}(\tau) - H_{11,1}(\tau) - H_{13,0}(\tau) + H_{19,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^3 \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \\
-H_{11,0}(\tau) - H_{11,1}(\tau) - H_{5,0}(\tau) + H_{7,0}(\tau) + H_{7,1}(\tau) + H_{11,1}(\tau) - H_{13,0}(\tau) + H_{19,1}(\tau) &= \\
&= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-2} \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^5 \eta(3\tau)^{-2} \\
-H_{11,0}(\tau) - H_{11,1}(\tau) - H_{5,0}(\tau) - H_{7,0}(\tau) - H_{7,1}(\tau) - H_{11,1}(\tau) + H_{13,0}(\tau) + H_{19,1}(\tau) &= \\
&= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-3} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^8 \eta(\tau)^{-3} \\
-H_{11,0}(\tau) + H_{11,1}(\tau) + H_{5,0}(\tau) + H_{7,0}(\tau) - H_{7,1}(\tau) + H_{11,1}(\tau) + H_{13,0}(\tau) + H_{19,1}(\tau) &= \\
&= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2 \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$a=5, b=12, c=2$$

$$\begin{aligned}
H_{2,0}(\tau) &= \eta(2\tau) \eta(6\tau)^2 \eta(12\tau)^5 \eta(24\tau)^{-2} \\
H_{2,2}(\tau) &= 2\eta(2\tau) \eta(12\tau)^{-1} \eta(24\tau)^2 \\
H_{4,1}(\tau) &= \eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)^3 \\
H_{6,0}(\tau) &= 2\eta(4\tau)^2 \eta(6\tau) \eta(8\tau)^{-1} \eta(12\tau)^{-1} \eta(24\tau) \\
H_{6,2}(\tau) &= 2\eta(2\tau) \eta(4\tau)^{-1} \eta(8\tau) \eta(12\tau)^2 \eta(24\tau)^{-1} \\
-H_{11,1}(\tau) + H_{5,1}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \eta(\tau)^3 \eta(2\tau)^{-1} \eta(3\tau)^{-1} \eta(6\tau)^2 \\
H_{11,1}(\tau) + H_{5,1}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right) \eta(3\tau)^{-1} \eta(6\tau)^2 \\
-H_{2,0}(\tau) + H_{2,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2 \eta(2\tau) \eta(3\tau)^{-1} \\
H_{2,0}(\tau) + H_{2,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-2} \eta(2\tau) \eta(3\tau)^5 \eta(6\tau)^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2H_{2,0}(\tau) + H_{6,0}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\frac{8\tau}{3}\right)\eta(4\tau)^2\eta(8\tau)^{-1} \\
H_{2,0}(\tau) + H_{6,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-2}\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^5\eta(2\tau)\eta\left(\frac{8\tau}{3}\right)^{-2} \\
-2H_{2,2}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2\eta(2\tau)\eta\left(\frac{8\tau}{3}\right)^{-1}\eta(4\tau)^{-1}\eta(8\tau) \\
H_{2,2}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1}\eta(2\tau)\eta\left(\frac{8\tau}{3}\right)^2 \\
-H_{3,0}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= -\eta(\tau)^2\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1}\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^2 \\
H_{3,0}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= \eta(\tau)^2\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau) \\
-H_{3,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^3\eta(6\tau)^{-1} \\
H_{3,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)^2\eta(3\tau)^2\eta(6\tau)^{-1} \\
-H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta(\tau)^{-1}\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2 \\
H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)^2\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau) \\
H_{1,0}(\tau) - H_{1,2}(\tau) - H_{7,0}(\tau) + H_{7,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)^3\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1} \\
-H_{1,0}(\tau) + H_{1,2}(\tau) - H_{7,0}(\tau) + H_{7,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^3\eta(\tau)^{-1} \\
-H_{1,0}(\tau) - H_{1,2}(\tau) + H_{7,0}(\tau) + H_{7,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-2}\eta(3\tau)^5\eta(6\tau)^{-2} \\
H_{1,0}(\tau) + H_{1,2}(\tau) + H_{7,0}(\tau) + H_{7,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-3}\eta(\tau)^8\eta(2\tau)^{-3} \\
2H_{1,1}(\tau) + H_{3,1}(\tau) - 2H_{5,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1}\eta(\tau)^2 \\
-H_{1,1}(\tau) - H_{3,1}(\tau) - H_{5,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \\
-H_{1,1}(\tau) + H_{3,1}(\tau) + H_{5,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2\eta(\tau)^3\eta(2\tau)^{-1} \\
2H_{1,1}(\tau) - H_{3,1}(\tau) + 2H_{5,1}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau) \\
2H_{2,0}(\tau) - 2H_{2,2}(\tau) - H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{6}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau) \\
-H_{2,0}(\tau) + H_{2,2}(\tau) - H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{6}\right)^2\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1}\eta(2\tau) \\
-2H_{2,0}(\tau) - 2H_{2,2}(\tau) + H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{\tau}{6}\right)\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)\eta(\tau)^2 \\
H_{2,0}(\tau) + H_{2,2}(\tau) + H_{6,0}(\tau) + H_{6,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{6}\right)^{-2}\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^5\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-2}\eta(2\tau) \\
-H_{3,0}(\tau) - H_{3,1}(\tau) - H_{3,2}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{8}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^2\eta\left(\frac{3\tau}{8}\right)\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right) \\
H_{3,0}(\tau) - H_{3,1}(\tau) + H_{3,2}(\tau) + H_{9,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{8}\right)\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{3\tau}{8}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2
\end{aligned}$$

$$a=5, \quad b=8, \quad c=3$$

$$H_{2,0}(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2\eta(12\tau)^{-1}$$

$$H_{2,2}(\tau) = -\eta(\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^2$$

$$H_{4,0}(\tau) = 2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2$$

$$\begin{aligned}
H_{4,2}(\tau) &= \eta(3\tau)^2 \eta(4\tau) \eta(6\tau)^{-1} \\
-H_{2,0}(\tau) + H_{2,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2 \\
H_{2,0}(\tau) + 2H_{2,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1} \eta(2\tau)^{-1} \eta(4\tau) \\
-H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) &= -\eta(\tau) \eta(3\tau)^{-2} \eta(6\tau)^5 \eta(12\tau)^{-2} \\
H_{2,1}(\tau) + H_{6,1}(\tau) &= \eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)^3 \eta(3\tau)^2 \eta(4\tau)^{-1} \eta(6\tau)^{-1} \\
-H_{2,3}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= 2\eta(2\tau)^2 \eta(3\tau) \eta(4\tau)^{-1} \eta(6\tau)^{-1} \eta(12\tau) \\
H_{2,3}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= 2\eta(2\tau)^2 \eta(3\tau)^{-1} \eta(4\tau)^{-1} \eta(6\tau)^2 \\
-H_{4,0}(\tau) + H_{4,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2 \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(4\tau) \\
H_{4,0}(\tau) + 2H_{4,2}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1} \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(\tau) \eta(2\tau)^{-1} \eta(4\tau) \\
-2H_{2,0}(\tau) - H_{2,3}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2 \\
2H_{2,0}(\tau) - H_{2,3}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \eta(3\tau) \\
-H_{2,1}(\tau) - 2H_{2,2}(\tau) + H_{6,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \\
-H_{2,1}(\tau) + 2H_{2,2}(\tau) + H_{6,1}(\tau) &= -\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-2} \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^5 \eta(3\tau)^{-2} \\
H_{1,0}(\tau) + H_{1,3}(\tau) - H_{3,3}(\tau) + H_{5,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2 \eta(3\tau)^{-1} \\
-H_{1,0}(\tau) + H_{1,3}(\tau) + H_{3,3}(\tau) + H_{5,0}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \eta(3\tau)^{-1} \\
H_{1,1}(\tau) + H_{1,2}(\tau) - H_{3,1}(\tau) + H_{5,2}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{4}\right) \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \eta(3\tau)^2 \\
H_{1,1}(\tau) - H_{1,2}(\tau) + H_{3,1}(\tau) + H_{5,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1} \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \eta(\tau)^{-1} \eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \eta(3\tau)^2 \\
H_{2,1}(\tau) - H_{2,3}(\tau) - H_{6,1}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-2} \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^5 \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2 \\
-H_{2,1}(\tau) + H_{2,3}(\tau) - H_{6,1}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2 \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(\tau)^{-1} \eta(2\tau)^3 \eta(4\tau)^{-1} \\
-2H_{2,1}(\tau) - H_{2,3}(\tau) + 2H_{6,1}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= -2\eta\left(\frac{\tau}{3}\right) \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right) \eta(2\tau)^2 \eta(4\tau)^{-1} \\
2H_{2,1}(\tau) + H_{2,3}(\tau) + 2H_{6,1}(\tau) + H_{6,3}(\tau) &= 2\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^{-1} \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(2\tau)^3 \eta(4\tau)^{-1}
\end{aligned}$$

$$a = 5, \quad b = 6, \quad c = 4$$

$$\begin{aligned}
H_{1,2}(\tau) &= \eta(\tau) \eta(6\tau)^{-1} \eta(12\tau)^2 \\
H_{3,0}(\tau) &= \eta(2\tau)^2 \eta(3\tau) \eta(4\tau)^{-1} \eta(6\tau)^{-1} \eta(12\tau) \\
H_{3,2}(\tau) &= \eta(\tau) \eta(2\tau)^{-1} \eta(4\tau) \eta(6\tau)^2 \eta(12\tau)^{-1} \\
-H_{1,0}(\tau) + H_{1,4}(\tau) &= -\eta(\tau)^3 \eta(2\tau)^{-1} \\
H_{1,0}(\tau) + H_{1,4}(\tau) &= \eta(\tau) \eta(3\tau)^{-2} \eta(6\tau)^5 \eta(12\tau)^{-2} \\
-2H_{1,2}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^2 \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-1} \eta(2\tau)^{-1} \eta(4\tau) \\
H_{1,2}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1} \eta(\tau) \eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^2 \\
-H_{2,1}(\tau) + H_{2,3}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{2}\right) \eta(2\tau) \\
H_{2,1}(\tau) + H_{2,3}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \eta(\tau)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-H_{3,0}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{4}\right)\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-1}\eta(\tau)\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^2 \\
H_{3,0}(\tau) + H_{3,2}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1}\eta(3\tau) \\
H_{1,0}(\tau) - 2H_{1,2}(\tau) + H_{1,4}(\tau) &= \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^2\eta(\tau)\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^{-1} \\
H_{1,0}(\tau) + 2H_{1,2}(\tau) + H_{1,4}(\tau) &= \eta\left(\frac{3\tau}{4}\right)^{-2}\eta(\tau)\eta\left(\frac{3\tau}{2}\right)^5\eta(3\tau)^{-2} \\
-H_{1,0}(\tau) - H_{1,4}(\tau) + H_{3,0}(\tau) &= -\eta\left(\frac{\tau}{3}\right)\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)\eta(2\tau)^2\eta(4\tau)^{-1} \\
H_{1,0}(\tau) + H_{1,4}(\tau) + 2H_{3,0}(\tau) &= \eta\left(\frac{\tau}{3}\right)^2\eta\left(\frac{2\tau}{3}\right)^5\eta(\tau)\eta\left(\frac{4\tau}{3}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

$$a=5, b=3, c=8$$

$$H_{1,0}(\tau) = \eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1}$$

$$H_{2,2}(\tau) = \eta(\tau)\eta(4\tau)$$

$$H_{1,1}(\tau) - H_{1,3}(\tau) - H_{1,5}(\tau) + H_{1,7}(\tau) = \eta\left(\frac{\tau}{4}\right)\eta(\tau)$$

$$H_{1,1}(\tau) + H_{1,3}(\tau) + H_{1,5}(\tau) + H_{1,7}(\tau) = \eta\left(\frac{\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)^3$$

(注1)  $b=1$  なら  $H_{mn}$  はすべて 0 となる。

$$\text{又, } (a, b, c) = (3, 2, 4) \quad \text{は} \quad (3, 4, 2)$$

$$(5, 4, 6) \quad \text{は} \quad (5, 12, 2)$$

$$(5, 2, 12) \quad \text{は} \quad (5, 6, 4)$$

の場合と、すべての  $H_{mn}$  が一致するので、表より省いた。

(注2) 上記の表で、下記のものを除き、一次独立な  $H_{mn}$  はすべて示されている。

$$a=4, b=15, c=1$$

$$H_{30}(\tau), H_{01}(\tau)$$

$$a=4, b=5, c=3$$

$$H_{12}(\tau) = q^{\frac{43}{60}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{15n+3})(1 - q^{15n+12})(1 - q^{15n+15}) \cdot \eta(\tau)$$

$$H_{21}(\tau) = q^{\frac{7}{60}} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{15n+6})(1 - q^{15n+9})(1 - q^{15n+15}) \cdot \eta(\tau)$$

$$\text{又 } H_{10}(\tau), H_{23}(\tau).$$